

УДК 519.7

С.В. Лутманов, О.А. Хотько

*Пермский государственный национальный  
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
8 (342) 2-396-309

### **ОПТИМАЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ ПОЛЕТА ТЯЖЕЛОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ КВАДРАТУ СКОРОСТИ**

*Исследуется управляемый полет тяжелой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. На движение точки накладываются фазовые ограничения, состоящие в том, что траектория полета должна оставаться в пределах некоторой полосы, не пересекающей с поверхностью земли, и заканчиваться в заданной точке. Начальное положение точки известно только приблизительно и определяется точно лишь в момент старта. В работе строится программное управление точкой, реализующее все перечисленные требования к кинематике полета и являющееся оптимальным по критерию "минимум силы".*

**Ключевые слова:** математическая модель; сопротивление пропорциональное квадрату скорости; линеаризованные дифференциальные уравнения; оптимальное управление.

### **Введение**

Данная работа является продолжением цикла статей [3–6], посвященных коррекции возмущенного движения управляемого динамического объекта с целью выхода его на базовый закон движения. Возмущение движения вызвано не точным соблюде-

нием начальных условий, а коррекция движения производится дополнительными управлениями, входящими в дифференциальные уравнения движения аддитивно базовым управлениям.

В статье показано, что указанная коррекция успешно осуществляется путем линеаризации в окрестности пары "базовое управление, базовое движение" исходной системы дифференциальных уравнений динамики.

## 1. Уравнения движения управляемой точки и постановка задачи

В работе [6] были выведены дифференциальные уравнения управляемого полета тяжелой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости (см. рис. 1).

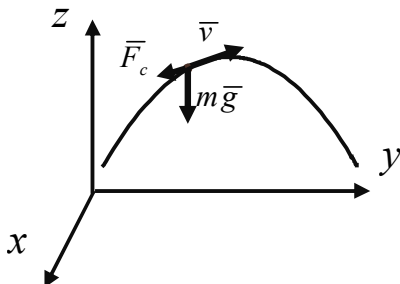


Рис. 1

Эти уравнения имеют вид

$$m\ddot{x} = -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_1,$$

$$m\ddot{y} = -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_2,$$

$$m\ddot{z} = -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - mg + v_3,$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\ \text{или} \quad \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $z$  – вертикальная,  $x, y$  – горизонтальные, координаты точки,  $m$  – ее масса,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $k = \text{const}$  –

коэффициент пропорциональности, а  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  – вектор управляю-

щих параметров. Полет начинается в момент времени  $t_0$  и заканчивается в момент времени  $T > t_0$  на поверхности земли в положении  $x_T, y_T, z_T$ . При этом точка должна лететь на высоте не менее  $\varepsilon > 0$  (за исключением заключительной фазы полета) и не более  $2\varepsilon > 0$  от поверхности земли. Начальное положение и начальные скорости точки заранее не определены. О них лишь известно, что они удовлетворяют условиям:

$$x_0 \approx 0, y_0 \approx 0, z_0 \in [\varphi(x_0, y_0) + \varepsilon, \varphi(x_0, y_0) + 2\varepsilon],$$

$$\dot{x}_0 \approx \frac{x_T}{T - t_0}, \dot{y}_0 \approx \frac{y_T}{T - t_0}, \dot{z}_0 \approx \frac{z_T - z_0}{T - t_0},$$

где  $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$  – гладкая функция двух переменных, моделирующая рельеф местности. Точные значения начальных условий становятся известными только в момент старта. Управление движением точки осуществляется в классе программных управлений.

**Определение 1.** Произвольная интегрируемая вектор функция  $v: [t_0, T] \rightarrow R^3$ , называется программным управлением точкой на промежутке времени  $[t_0, T]$ . Символом  $\Pi[t_0, T]$  обозначим множество всех программных управлений на промежутке времени  $[t_0, T]$ .

Сформулируем основную задачу, решаемую в данной статье.

**Задача 1** (основная). *Определить программное управление  $w^0(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$ , обеспечивающее выполнение требований, предъявляемых к кинематике полета точки.*

## 2. Общая схема решения задачи 1 (основной)

Решение задачи 1 начинается с построения кинематического закона движения точки

$$x = \hat{x}(t), \quad y(t) = \hat{y}(t), \quad z = \hat{z}(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

удовлетворяющего всем требованиям, которые предъявляются к кинематике полета. В частности, для него должны быть выполнены начальные и конечные условия

$$\hat{x}(t_0) = 0, \quad \hat{y}(t_0) = 0, \quad \hat{z}(t_0) \in [\varphi(x_0, y_0) + \varepsilon, \varphi(x_0, y_0) + 2\varepsilon],$$

$$\hat{x}(T) = x_T, \quad \hat{y}(T) = y_T, \quad \hat{z}(T) = z_T,$$

$$\dot{\hat{x}}(t_0) = \frac{x_T}{T - t_0}, \quad \dot{\hat{y}}(t_0) = \frac{y_T}{T - t_0}, \quad \dot{\hat{z}}(t_0) = \frac{z_T - z_0}{T - t_0}.$$

**Определение 2.** *Кинематический закон движения точки (2.1) будем называть базовым законом движения.*

Конкретная процедура построения такого закона движения описана в работе [2].

**Определение 3.** *Программное управление*

$$v = \hat{v}(t), \quad t \in [t_0, T],$$

*реализующее базовый закон движения точки, назовем базовым программным управлением.*

Для построения базового программного управления уравнения (1.1) разрешаем относительно управляющих параметров:

$$\begin{aligned} v_1 &= m\ddot{x} + k\dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_2 &= m\ddot{y} + k\dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_3 &= m\ddot{z} + k\dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + mg. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Базовый закон движения (2.1) подставим в уравнения (2.2). В результате получаем искомые базовые управления

$$\begin{aligned}
\hat{v}_1(t) &= m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}, \\
\hat{v}_2(t) &= m\ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}, \\
\hat{v}_3(t) &= m\ddot{z}(t) + k\dot{z}(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} + mg.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

**Определение 4.** Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями  $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  и базовыми управлениями (2.3) будем называть возмущенным движением точки.

**Определение 5.** Разность между возмущенным и базовым движением назовем возмущением.

Возмущенное движение не обязано удовлетворять требованиям, предъявляемым к кинематике полета. Для того чтобы эти требования были выполнены, возмущенные движения следует откорректировать. С этой целью в дифференциальные уравнения динамики движения точки (1.1) добавляются дополнительное управление  $u(\cdot)$ , аддитивно базовому управлению. Уравнения (1.1) тогда принимают вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} (v_1 + u_1), \\
\ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} (v_2 + u_2), \\
\ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} (v_3 + u_3).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Дополнительными управлениями следует распорядиться так, чтобы возмущенное движение, начиная с некоторого момента времени  $t^* \in [t_0, T]$ , совпало с базовым движением точки. Заметим, что в этот момент времени возмущения обратятся в ноль и требования, предъявляемые к кинематике полета начиная с момента времени  $t^* \in [t_0, T]$ , будут выполняться.

Динамика возмущений с высокой степенью точности описывается линеаризованной в окрестности пары "базовое движе-

ние, базовое управление" системы дифференциальных уравнений (1.1). Для ее вывода заменой переменных

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad z = y_3, \quad \dot{x} = y_4, \quad \dot{y} = y_5, \quad \dot{z} = y_6$$

нормализуем уравнения (1.1). В результате получим

$$\dot{y}_1 = y_4,$$

$$\dot{y}_2 = y_5,$$

$$\dot{y}_3 = y_6,$$

$$\dot{y}_4 = -\frac{k}{m} y_4 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2} + \frac{1}{m} (v_1 + u_1),$$

$$\dot{y}_5 = -\frac{k}{m} y_5 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2} + \frac{1}{m} (v_2 + u_2),$$

$$\dot{y}_6 = -\frac{k}{m} y_6 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2} - g + \frac{1}{m} (v_3 + u_3).$$

Обозначим  $\hat{y}_1(t) = \hat{x}(t)$ ,  $\hat{y}_2(t) = \hat{y}(t)$ ,  $\hat{y}_3(t) = \hat{z}(t)$ ,

$$\hat{y}_4(t) = \dot{\hat{x}}(t), \quad \hat{y}_5(t) = \dot{\hat{y}}(t), \quad \hat{y}_6(t) = \dot{\hat{z}}(t) \quad t \in [t_0, T],$$

$$Y_4(y_4, y_5, y_6) = -\frac{k}{m} y_4 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2},$$

$$Y_5(y_4, y_5, y_6) = -\frac{k}{m} y_5 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2},$$

$$Y_6(y_4, y_5, y_6) = -\frac{k}{m} y_6 \cdot \sqrt{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2} - g.$$

и выпишем линеаризованную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (2.5)$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_4}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_4}{\partial y_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_5}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_5}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_5}{\partial y_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_6}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_6}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_6}{\partial y_6} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что динамический объект, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений (2.5), является вполне управляемым. Следовательно, задача о переводе его фазового вектора из начального положения

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_0, x_2(t_0) = y_0, x_3(t_0) = z_0, \\ x_4(t_0) &= \dot{x}_0 - \frac{x_T}{T-t_0}, x_5(t_0) = \dot{y}_0 - \frac{y_T}{T-t_0}, \\ x_6(t_0) &= \dot{z}_0 - \frac{z_T - z_0}{T-t_0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

в начало координат имеет решение для любого момента времени  $t^* \in [t_0, T]$ . В статье предлагается решать эту задачу, дополнительно потребовав оптимальность программного управления по какому-либо критерию.

Таким образом, приходим к следующей задаче оптимального управления линейным динамическим объектом (2.5).

**Задача 2** (вспомогательная). *Определить программное управление  $u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, t^*]$ , переводящее фазовый вектор линейного динамического объекта (2.5) из начального положения (2.6) в начало координат в момент времени  $t^* \in [t_0, T]$  и оптимизируя при этом выбранный критерий качества.*

Решением задачи 1 (основной) будет служить управление

$$w^0(t) = \begin{cases} \hat{v}^0(t) + u^0(t), & t \in [t_0, t^*], \\ \hat{v}^0(t), & t \in [t^*, T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

**Определение 6.** *Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) с начальными условиями*

$$(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

*и управлениями (2.7) будем называть откорректированным движением точки.*

### 3. Решение задачи 2 (вспомогательной) по критерию "минимум силы"

В работе [6] **задача 2** (вспомогательная) была решена по критерию

$$I^{\text{эн}}[u(\cdot)] = \left[ \int_{t_0}^{t^*} \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}},$$

который в литературе, например [1], носит название "минимум энергии". В данной статье дополнительное управление определяется из условия минимума величины

$$I^{\text{сил}}[u(\cdot)] = \text{vrai max}_{\tau \in [t_0, t^*]} \|u(\tau)\|. \quad (3.1)$$

Критерий (3.1) носит название "минимум силы" [1]. Следуя монографии [1] и учебному пособию [2] изложим кратко алгоритмы решения **задачи 2** (вспомогательной) по критерию "минимум силы".

$$\text{Пусть } X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}(t, \tau) & \dots & x_{16}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{61}(t, \tau) & \dots & x_{66}(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in [t_0, t^*]$$

– фундаментальная матрица Коши для однородного векторного дифференциального уравнения  $\dot{x} = A(t)$ . Полагаем

$$\begin{aligned} H[t^*, t] &= X[t^*, t]B(t) = \begin{pmatrix} h^{(1)}(t) \\ \dots \\ h^{(6)}(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} h_1^{(1)}(t) & h_2^{(1)}(t) & h_3^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(6)}(t) & h_2^{(6)}(t) & h_3^{(6)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t^*]. \end{aligned}$$

**Определение 2.** Матрица  $H[T, t]$ ,  $t \in [t_0, T]$  называется переходной матрицей линейного динамического объекта (2.5).

Символом

$$h^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(i)}(t) & h_2^{(i)}(t) & h_3^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

обозначим  $i$  – ю,  $i = 1, \dots, 6$  строку матрицы перехода.

Полагаем

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_6 \end{pmatrix} = -X[t^*, t_0] \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \dots \\ x_6(t_0) \end{pmatrix}.$$

Оптимальное управление  $u^0(t)$ ,  $t \in [t_0, t^*]$ , решающее задачу 2 (вспомогательную), строится по формуле

$$u^0(\cdot) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{(h^0(\cdot))^T}{\sqrt{\langle (h^0(\cdot))^T, (h^0(\cdot))^T \rangle}},$$

где

$$\begin{aligned} \left(h^0(\cdot)\right)^T &= \sum_{i=1}^n l_i^0 \left(h^{(i)}(\cdot)\right)^T(\cdot), \\ \rho^0 &= \int_{t_0}^{t^*} \sqrt{\left\langle \left(h^0(\cdot)\right)^T, \left(h^0(\cdot)\right)^T \right\rangle} d\tau, \end{aligned}$$

а числа  $l_1^0, \dots, l_6^0$  – решение задачи математического программирования

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t^*} \sum_{i,j=1}^6 \sqrt{\left\langle \left(h^{(i)}(\cdot)\right)^T, \left(h^{(j)}(\cdot)\right)^T \right\rangle} l_i l_j d\tau &\rightarrow \min, \\ \sum_{s=1}^6 c_s l_s &= 1. \end{aligned}$$

#### 4. Численный эксперимент

Изложенная выше теория иллюстрируется на следующих числовых данных:

$$k = 0.45, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}, \varepsilon = 30 \text{ м},$$

$$t_0 = 0, T = 10 \text{ сек}, \varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.00005 \cdot x \cdot y) \text{ м},$$

$$x_0 = -40 \text{ м}, y_0 = 20 \text{ м}, z_0 = 40 \text{ м},$$

$$x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 100 \text{ м}, z_T = \varphi(x_T, y_T) = 32.51 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = 310 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \dot{y}_0 = -10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \dot{z}_0 = -12.75 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, t^* = 5 \text{ сек}.$$

**Задача 2** (вспомогательная) решается по критерию "минимум силы".

Приведем совместные графики реализации во времени координаты  $z(t)$  управляемой точки в базовом и откорректированном движениях.

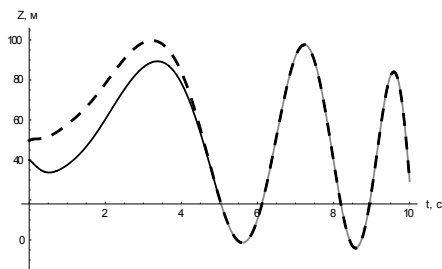


Рис. 2

На рис. 2 видно, что в момент времени  $t^* = 5 \text{ сек}$  откорректированное движение выходит на базовое движение и в дальнейшем с ним совпадает.

На рис. 3 показан график высоты откорректированного полета точки над поверхностью земли, т. е. разности

$$z(t) - \varphi(x(t), y(t)), \quad t \in [t_0, T].$$

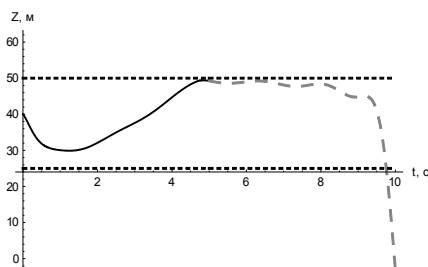


Рис. 3

Из графика следует, что фазовые ограничения для откорректированного движения точки не нарушаются.

В заключении проведем анализ результатов управления точкой в зависимости от момента выхода откорректированного движения на базовое движение. Очевидно, что ранний выход обеспечивает более качественное выполнение кинематических требований, предъявляемых к полету точки. Однако более раннему совмещению откорректированного и базового полетов точки соответствует большее (худшее) значение критерия качества.

Этот факт иллюстрируется таблицами 1 и 2, построенных как для критерия "минимум энергии", так и для критерия "минимум силы".

Таблица 1. Критерий "минимум энергии"

| $t_*$ | $I_{*эн}$ |
|-------|-----------|
| 1     | 18935.20  |
| 2     | 9768.60   |
| 3     | 7276.68   |
| 4     | 6017.81   |
| 5     | 5158.61   |
| 6     | 4522.24   |
| 7     | 4149.00   |
| 8     | 3892.51   |
| 9     | 3608.72   |
| 10    | 3421.56   |

Таблица 2. Критерий "минимум силы"

| $t_*$ | $I_{*сил}$ |
|-------|------------|
| 1     | 20677.30   |
| 2     | 7294.68    |
| 3     | 4354.69    |
| 4     | 3080.51    |
| 5     | 2341.78    |
| 6     | 1870.93    |
| 7     | 1593.10    |
| 8     | 1391.92    |
| 9     | 1211.92    |
| 10    | 1092.78    |

В обеих таблицах величина критерия монотонно убывает (улучшается) с ростом момента совмещения откорректированного движения с базовым движением.

#### Библиографический список

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.

3. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы лиц // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.

4. Кучкова Т.Ю., Лутманов С.В. Задачи управления одной динамической системой с тремя степенями свободы // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 25–36.

5. Лутманов С.В., Овчинников В.А. Оптимальная коррекция движения твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 37–50.

6. Лутманов С.В. Хотько О.А. Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 69–75.